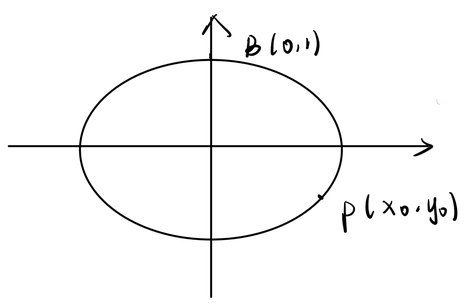
第6讲：椭圆与双曲线题型拓展(2)

题型一：最值问题

1. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点，点 P 为椭圆上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为 _____.

2. (2021 全国Ⅰ文) 设 B 是椭圆 C:$\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，点 P 在椭圆上，则 $|PB|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.



$\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$.

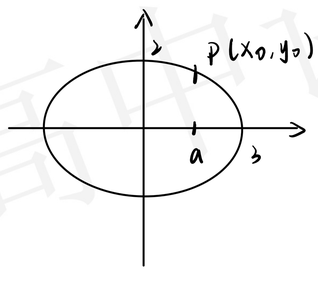
$\Rightarrow x_0^2=5-5y_0^2$

$PB^2=x_0^2+(y_0-1)^2$

$=5-5y_0+y_0^2-2y_0+1$

$=-4y_0^2-2y_0+6$. $y_0\in[-1,1]$ $y'_{max}=-4\times\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+6=\frac{25}{4}$

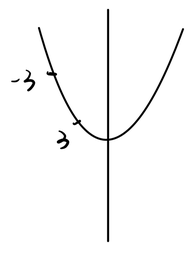
3. 已知定点 $A(a,0)\,(a>0)$ 到椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点的距离的最小值为1，则 a 的值为 _____.



$PA^2=(x_0-a)^2+y_0^2$

$=x_0^2+a^2-2ax_0+4-\frac{4}{9}x_0^2$

$=\frac{5}{9}x_0^2-2ax_0+a^2+4$.



$x_0=\frac{9}{5}a$.

1° $\frac{9}{5}a\geq 3\Rightarrow a\geq\frac{5}{3}$. $-3\leq x_0\leq 3$.

$a^2-6a+8=0$. $a=2/a=4$.

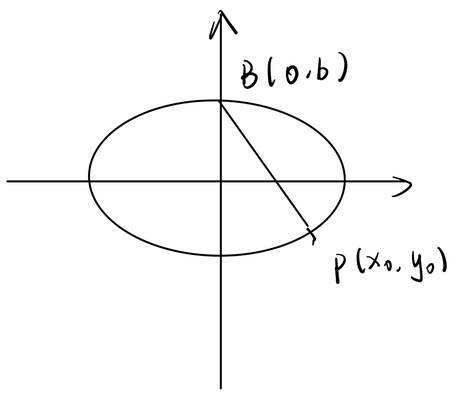
2° $\frac{9}{5}a<3\Rightarrow 0<a<\frac{5}{3}$.

$PA^2_{min}=\frac{5}{9}\times\frac{81}{25}a^2-2a\cdot\frac{9}{5}a+a^2+4=1$

4. (2021 全国Ⅰ理) 设 B 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\leqslant 2b$，则 C 的离心率的取值范围是（ C ）

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

以下



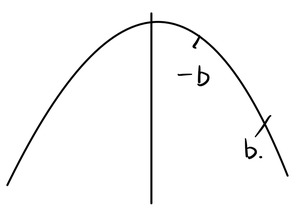
$PB^2=x_0^2+(y_0-b)^2$

$=a^2-\frac{a^2}{b^2}y_0^2+y_0^2+b^2-2by_0$

$=\frac{b^2-a^2}{b^2}y_0^2-2by_0+a^2+b^2$

<0

$y_0\in[-b,b)$.



$y_0=\frac{b}{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\frac{b^3}{b^2-a^2}\leq -b$.

$\frac{b^2}{b^2-a^2}\leq -1$

$b^2\geq a^2-b^2$

$2b^2\geq a^2$

$\frac{b^2}{a^2}\geq\frac{1}{2}$

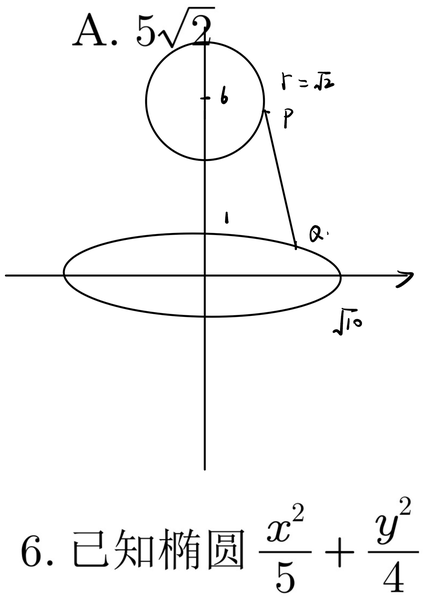
$e=\sqrt{1-\frac{1}{2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$



高中课程资料微信：NSJ2026

5. 设 P,Q 分别为 $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 上的点，则 P,Q 两点间的最大距离是（ D ）

A. $5\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{46}+\sqrt{2}$　　C. $7+\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$



先定Q.

$PQ_{max}=AQ_{max}+\sqrt{2}$

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 内有一点 $P(1,-1)$，F 是椭圆的右焦点，M 是椭圆上一点，则

(1) $MP+MF$ 的最大值、最小值分别为 _____；(2) $MP+\sqrt{5}MF$ 的最小值为 _____.

7. 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，$A(1,4)$，P 是双曲线右支上的动点，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值为 _____.

8. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 的左支上一点，$A(0,6\sqrt{6})$，当 ΔAPF 周长最小时，该三角形的面积为 _____.

9. 设 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点，A,B 分别为右顶点、上顶点，O 为坐标原点，P 是椭圆上第一象限任意一点，则四边形 $OAPB$ 面积的最大值是 _____.

高中课程资料微信：NSJ2026



10. 设 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点，O 为坐标原点，P 是椭圆上任意一点，则 P 到直线 $x+y+5=0$ 距离的最大值最小值分别为 _____.

题型二：渐近线问题

11. 已知双曲线 C 经过点 $C(1,1)$，它的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$．则双曲线 C 的标准方程是 _____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值为 _____

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A,B 两点．设 A,B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

14. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到渐近线的距离等于（　　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

高中课程资料微信：NSJ2026

15. (2019·新课标Ⅰ) 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$, 则 C 的离心率为 _____.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F, 过点 F 且斜率为 2 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则双曲线的离心率可以是 (BCD)

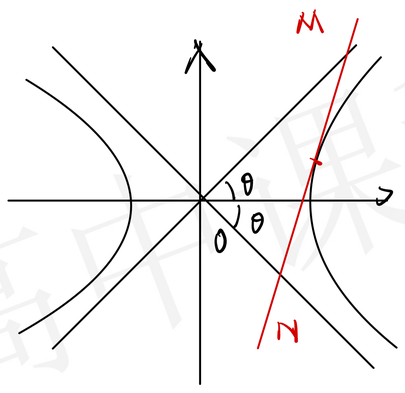
A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 3

$\frac{b}{a}\geqslant 2$.　　交点数: 与渐近线斜率的大小关系.

$e\geqslant\sqrt{5}$

左、右支各一个交点

17. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 动直线 l 与双曲线 C 恰有 1 个公共点, 且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M、N, 设 O 为坐标原点, 求 ΔOMN 面积.



① 若 MN 斜率不存在

不妨设 $MN: x=a$.

则 $M(a,b)$　$N(a,-b)$

$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot a=ab$.

② 若 MN 斜率存在.

设: $MN: y=kx+m$　　一个交点

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ kx-y+m=0\end{cases}$ 联立, $\Delta=0$, $\Rightarrow$ $a^2k^2-b^2=m^2$

$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|\cdot\sin 2\theta$.

$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+\frac{b^2}{a^2}x_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+\frac{b^2}{a^2}x_2^2}\cdot\frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a^2}|x_1\cdot x_2|\cdot\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}\cdot x_1\cdot x_2=\frac{b}{a}x_1\cdot x_2$　　韦达定理

$=ab$.

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow b^2x^2-a^2(kx+m)^2=0$.

$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-a^2m^2=0$.

$x_1\cdot x_2=\frac{a^2m}{a^2k^2-b^2}=a^2$

综上, $S_{\Delta OMN}=ab$.

高中课程资料中的 微信: NSJ2026



题型三：椭圆双曲线综合问题

18. 如图 F_1、F_2 是椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A、B 分别是 C_1、C_2 在第二、四象限的公共点，若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是（　D　）

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{3}{2}$

D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

焦点△面积 $b^2\tan\frac{\theta}{2}$.（椭圆）

$\frac{b^2}{\tan\theta}$.（双曲线）

法一：$S_{\triangle AF_1F_2}=b_1^2\tan 45^\circ=\dfrac{b_2^2}{\tan 45^\circ}$

$\therefore b_1=b_2=1$.

定义：$\begin{cases}AF_2+AF_1=2a_1\\ AF_2-AF_1=2a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AF_2=a_1+a_2\\ AF_1=a_1-a_2\end{cases}$

$a_1=2$.

$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$

$4-1=a_2^2+1$

$a_2^2=2$.

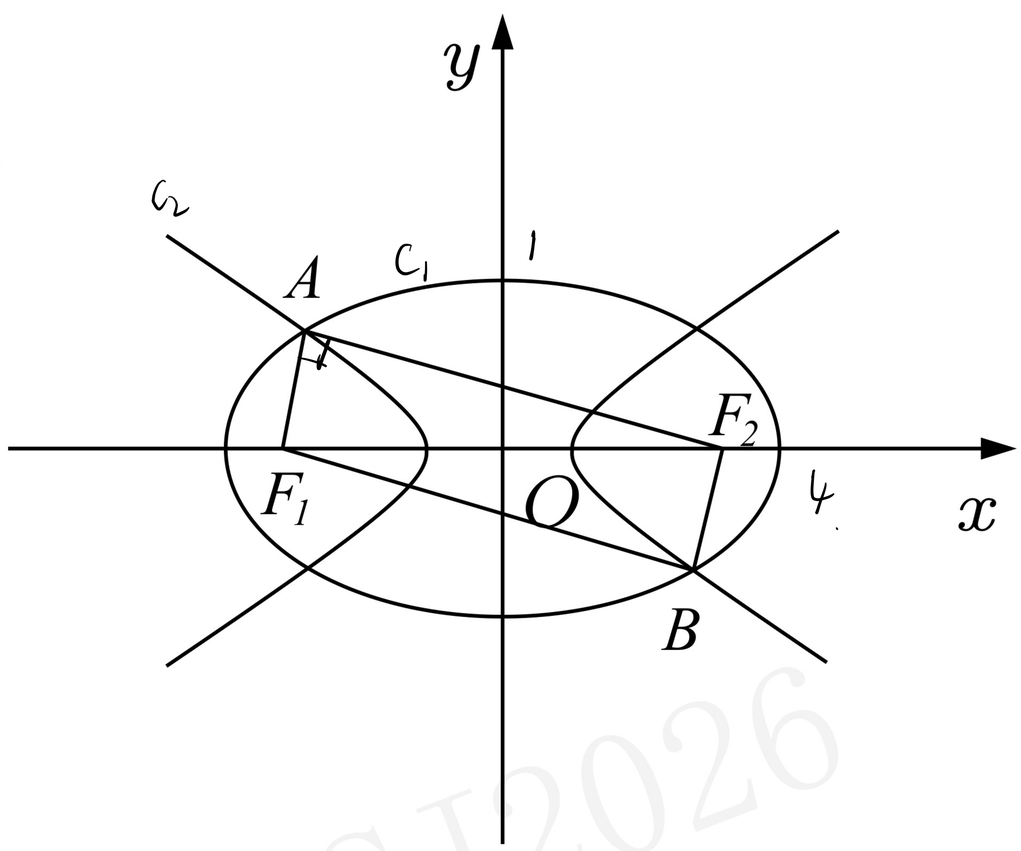
$(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2=4c^2$

$a_1^2+a_2^2=2c^2=6$.

$a_2^2=2$.　$c^2=3$.

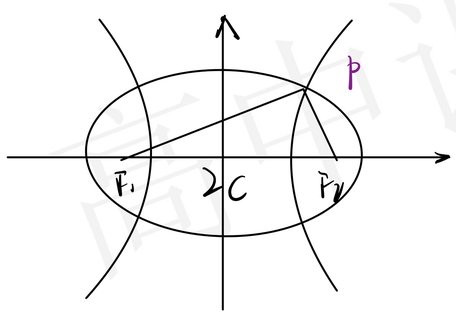
$e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$e=\sqrt{1+\dfrac{b_2^2}{a_2^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



19. 已知 F_1，F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1，e_2，则 $\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



$\begin{cases}PF_1+PF_2=2a_1\\ PF_1-PF_2=2a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}PF_1=a_1+a_2\\ PF_2=a_1-a_2\end{cases}$

由余弦定理

$\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{e_1^2}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{e_2^2}=1$.

$S_{\triangle PF_1F_2}=b_1^2\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{b_2^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$

$b_1^2\cdot\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=b_2^2$

$(a_1^2-c_1^2)\sin^2\dfrac{\theta}{2}=(c_2^2-a_2^2)\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

20. 已知 F_1，F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为（　　）

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 3　　D. 2

$\dfrac{\sin^2 30}{e_1^2}+\dfrac{\cos^2 30}{e_2^2}=1$

求 $\left(\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}\right)$ max.

高中课程资料微信：NSJ2026



作业

1. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的中心和左焦点，点 P 为椭圆上的任意一点，则 $|OP|^2+|PF|^2$ 的最小值为 _____.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 的左焦点为 F，一动直线与椭圆交于点 M，N，则 $\triangle FMN$ 的周长的最大值为 _____.

3. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，直线 $y=k(x-c)$ 与 C 的右支有两个交点，则（　　）

A. $|k|<\frac{b}{a}$　　B. $|k|>\frac{b}{a}$　　C. $|k|<\frac{c}{a}$　　D. $|k|>\frac{c}{a}$

4. 设 M 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点，A_1 和 A_2 分别是椭圆的左、右顶点，则 $\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{MA_2}$ 的最小值等于 _____

高中课程资料 微信：NSJ2026